

Р.Г. Мухарлямов

*Российский университет дружбы народов (Москва).
rmuharliamov@sci.pfu.edu.ru*

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕМЕНТЫ РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

Введение

Известные к настоящему времени динамические аналогии позволяют использовать методы классической механики для решения задачи управления системами, содержащими элементы различной природы, экономическими объектами и производственными системами. Процессы изменения состояния этих систем описываются дифференциально-алгебраическими уравнениями, составленными из кинематических соотношений, целей управления, уравнений связей и уравнений динамики, выраженных в обобщенных координатах или в канонических переменных.

Обычно под решением задачи управления механической системой понимают аналитическое построение управляющих воздействий, обеспечивающих изменение фазовых координат по заданному закону. Такое представление, с одной стороны, требует определения желаемого закона движения, с другой стороны, в ряде случаев для построения требуемого управления не требуется описания закона движения системы по всем координатам. Желаемые свойства движения могут быть выражены уравнениями связей. Тогда управляющие воздействия определяются как соответствующие реакции связей. Моделирование решения задачи управления динамикой механической системы

сводится к решению системы дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений динамики и уравнений связей.

Динамические аналогии

Аналогии между динамикой систем различной физической природы и механических систем приведены в известной работе [1]. В работе [2] динамика систем различной физической природы описывается в унифицированных переменных и исследуется с использованием методов и динамических моделей классической механики. Изучению динамики живых организмов, моделируемых уравнениями механики, и решению задач управления посвящены исследования [3 – 5]. Так, например, движение сустава, рассматриваемого как стержень с шарнирным закреплением, описывается уравнением вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

В [6] показано, что уравнениями механики

$$\frac{d}{dt} \left(L \frac{dI}{dt} \right) + \left(\tau - \frac{dL}{dt} \right) \frac{dI}{dt} + \frac{I}{G} = M$$

описывается также процесс познания, если под величинами L , G , τ , M и I понимать параметры, характеризующие интеллектуальные свойства субъекта познания, и объем информации.

В работах [7 – 9] впервые были поставлены вопросы представления процессов в экономике динамическими моделями, соответствующими механике систем с переменной массой. Динамика точки переменной массы [10] была изложена в магистерской диссертации И.В. Мещерского, которую он защитил 10.12.1897 в Петербургском университете. Результаты его исследований были опубликованы в 1897, 1898 и 1904 гг. Работы по управлению динамикой систем с переменной массой были развиты в [11] до создания нового направления, связанного

с управлением программным движением и обратными задачами динамики. С использованием методов аналитической динамики систем с переменной массой, изложенных в [12 – 14] решены задачи моделирования и управления динамикой производственных систем.

Динамика экономических объектов

Динамика простого экономического объекта, принимаемого за элемент экономики, описывается теми же уравнениями, что и движение точки переменной массы:

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dY}{dt} \right) + w \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right) = u \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right).$$

Здесь Y — объем выпускаемой продукции, $y(t) = dY/dt$ — максимальный объем продукции, которую может выпускать объект в единицу времени при отсутствии ограничений (мощность), $m(t)$ — мгновенная фондоёмкость основных фондов объекта по выпуску данного вида продукции, $q(t) = m(t)y(t)$ — состояние основных производственных фондов, w, u — основные фонды, выбывающие и вновь поступившие с момента t .

Изменение мощности производственного предприятия, состоящего из N подразделений, с течением времени описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_a}{dt} = \nu_a, \quad \frac{d}{dt}(m_a \nu_a) + w_a(x_c, \nu_b, t) = p_a(x_c, \nu_b, t) + \\ + b_{as}(x_c, \nu_b, t)u^s, \quad a, b, c = \overline{1, N}, \quad s = \overline{1, S}, \quad (1) \end{aligned}$$

где x_a — объем выпускаемой продукции, ν_a — мощность, m_a — мгновенная фондоёмкость, $m_a \nu_a = q_a$ — состояние основных производственных фондов a -го подразделения в момент времени t , w_a, p_a — изменение фондов a -го подразделения, выбы-

вающих из потребления за счет износа и старения оборудования, u^1, \dots, u^s — управление за счет поступающих основных фондов, b_{as} — известные коэффициенты.

Требуемые свойства функционирования предприятия задаются уравнениями связей

$$\omega^p(x_a, t) = 0, \quad \omega^r(x_a, \nu_b, t) = 0, \quad p = \overline{1, P}, \quad r = \overline{P+1, R}, \quad (2)$$

Если часть уравнений связей (2) $\omega^h(x_a, t) = 0$, $h = \overline{1, H}$, допускает выражение объемов продукции x_1, \dots, x_N через произвольные обобщенные координаты q^1, \dots, q^n , $n = N - H$:

$$f^{\mu-n}(q^i, t) = 0, \quad f^{\rho-n}(q^i, \nu^j, t) = 0, \\ \mu = \overline{n+1, n+m}, \quad \rho = \overline{n+m+1, n+m+r}, \quad (3)$$

то систему (1) можно представить в виде уравнений Лагранжа.

Уравнения динамики в обобщенных координатах

Решение уравнений динамики ищется в следующей последовательности. Пусть движение механической системы определяется уравнениями связей (3) и уравнениями динамики

$$\frac{dq^i}{dt} = \nu_i, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^0}{\partial \nu^i} \right) - \frac{\partial L^0}{\partial q^i} = \\ = Q_i - \frac{\partial D^0}{\partial \nu^i} + \lambda_k \varphi_i^k, \quad k = \overline{1, m+r}. \quad (4)$$

Здесь $L^0 = L^0(q^i, \nu^j, t)$ — лагранжиан системы, $D^0 = D^0(q^i, \nu^j, t)$ — диссипативная функция, $Q_k = Q_k(q^i, \nu^j, t)$ — непотенциальные обобщенные силы, λ_k — множители Лагранжа, $\varphi_i^{\mu-n} = \partial f^{\mu-n} / \partial q^i$, $\varphi_i^{\rho-n} = \partial f^{\rho-n} / \partial \nu^i$. В равенствах (4), как и всюду в дальнейшем, предполагается суммирование по одинаковым индексам k .

Система уравнений (3), (4) составляет систему дифференциально-алгебраических уравнений индекса 3. Обычный путь решения состоит в определении выражения множителей Лагранжа λ_k из равенств

$$\frac{dq^\mu}{dt} = \nu^\mu, \quad \frac{d\nu^\mu}{dt} = 0, \quad \frac{d\nu^\rho}{dt} = 0, \quad (5)$$

где q^μ, ν^μ, ν^ρ представляют значения функций, задающих уравнения связей:

$$q^\mu = f^{\mu-n}(q^i, t), \quad \nu^\mu = \varphi_j^{\mu-n}(q^i, t)\nu^j + f_t^{\mu-n}(q^i, t),$$

$$f_t^{\mu-n} = \frac{\partial f^{\mu-n}}{\partial t}, \quad \nu^\rho = f^{\rho-n}(q^i, \nu^j, t). \quad (6)$$

Из выражений $q^\mu = c_1^\mu t + c_0^\mu$, $\nu^\rho = c^\rho$ общего решения уравнений (5), содержащих произвольные постоянные $c_1^\mu, c_0^\mu, \dots, c^\rho$, следует, что решение $q^i = q^i(t)$, $\nu^i = \nu^i(t)$ системы (4) будет удовлетворять уравнениям связей (3) только в том случае, если начальные условия $q^i(t_0) = q_0^i$, $\nu^i(t_0) = \nu_0^i$ соответствуют уравнениям связей (3):

$$f^{\mu-n}(q_0^i, t_0) = 0, \quad \varphi_j^{\mu-n}(q_0^i, t_0)\nu_0^j + f_t^{\mu-n}(q_0^i, t_0) = 0,$$

$$f^{\rho-n}(q_0^i, \nu_0^j, t_0) = 0. \quad (7)$$

Если же условия (7) не выполняются, то отклонение движения, соответствующего решению системы (4), будет возрастать с течением времени. Тем более не приходится ожидать точного выполнения уравнений связей на решениях системы уравнений (4), определяемых численным интегрированием.

Пример 1. Принимая за q^1, q^2 прямоугольные координаты x_1, x_2 тяжелой точки, уравнения (3) – (4) можно записать в виде

$$(x_1^2 + x_2^2 - 1)/2 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1, \quad \frac{d\dot{x}_1}{dt} = g - \lambda x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2, \quad \frac{d\dot{x}_2}{dt} = -\lambda x_2, \quad (9)$$

$g = 9.81$. Из условий (5) следует выражение для множителя Лагранжа:

$$\lambda = -\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} (gx_1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

На рис. 1 представлена траектория точки, соответствующая решению системы (8) – (9), при начальных условиях не соответствующих уравнению связи (8). Рис. 2 указывает на возрастание отклонений решения, соответствующего начальным условиям $x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, \dot{x}_1^0 = 0, \dot{x}_2^0 = 0$, от уравнения связи (7) с течением времени при численном решении.

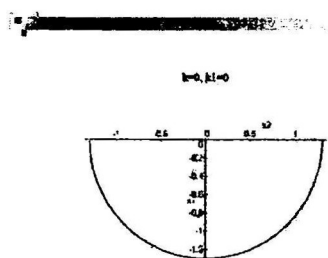


Рис. 1

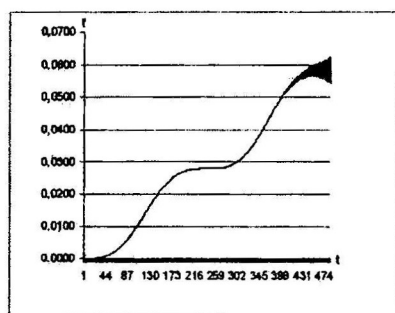


Рис. 2

Следовательно, требуется такая модификация множителей Лагранжа λ_k , которая ограничивала бы величины q^μ, ν^μ, ν^ρ , оценивающие отклонения от уравнений связей (3), обусловленные начальными условиями и погрешностями численного интегрирования. Рассматривая параметры q^μ, ν^μ, ν^ρ как дополнительные “избыточные” координаты, заменим исходную систему расширенной системой [15], фазовое состояние которой определяется обобщенными координатами q^i, q^μ и обобщенными скоростями ν^i, ν^μ, ν^ρ , удовлетворяющими уравнениям связей

$$q^\mu - f^{\mu-n}(q^i, t) = 0, \quad \nu^\mu - \varphi_i^{\mu-n} \nu^i - f_t^{\mu-n} = 0, \\ \nu^\rho - f^{\rho-n}(q^i, \nu^j, t) = 0. \quad (10)$$

Представим лагранжиан L и диссипативную функцию D расширенной системы равенствами

$$L = T - P, \quad 2T = 2T^0 + m_{\eta\theta}(q^k) \nu^\eta \nu^\theta, \quad 2T^0 = m_{ij}(q^k) \nu^i \nu^j, \\ 2P = 2P^0(q^i, t) + k_{\mu\nu}(q^i, t) q^\mu q^\nu, \\ 2D = 2D^0(q^i, \nu^j, t) + c_{\eta\theta}(q^i, t) \nu^\eta \nu^\theta, \\ \nu = \overline{n+1, n+m}, \quad \eta, \theta = \overline{n+1, n+m+r}.$$

Динамика расширенной системы описывается уравнениями

$$\frac{dq^i}{dt} = \nu^i, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \nu^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i - \frac{\partial D}{\partial \nu^i} + \lambda_k \varphi_i^k, \quad (11)$$

$$\frac{dq^\mu}{dt} = \nu^\mu, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \nu^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = - \frac{\partial D}{\partial \nu^\mu}, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \nu^\rho} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \nu^\rho}. \quad (13)$$

Будем предполагать, что коэффициенты m_{ij} , $m_{\eta\theta}$, $k_{\mu\nu}$, $c_{\eta\theta}$ и все их частные производные ограничены в области Ω изменения переменных q^i , ν^j и при всех $t \geq t_0$. Система уравнений (11) – (13) приводится к виду, разрешенному относительно старших производных:

$$\frac{dq^k}{dt} = \nu^k, \quad \frac{dq^\mu}{dt} = \nu^\mu, \\ \frac{d\nu^k}{dt} = m^{ki} \left(m_i + \varphi_i^k \lambda_k + m_i^{(2)} \right), \\ \frac{d\nu^\theta}{dt} = -m^{\theta\eta} \left(k_{\eta\mu} q^\mu + b_{\eta\theta} \nu^\theta \right), \\ m^{ki} = (m_{ik})^{-1}, \quad m^{\theta\eta} = (m_{\eta\theta})^{-1}, \quad (14)$$

через $m_i^{(2)}$ обозначены члены второго и более высокого порядка относительно избыточных переменных q^μ, ν^μ, ν^ρ .

Уравнения динамики в канонических переменных

Решение системы дифференциально-алгебраических уравнений (3), (4) представляется более удобным, когда состояние системы определяется каноническими переменными

$$q^i, \quad q^\mu, \quad p_s = \frac{\partial L}{\partial \nu^s} = m_{sh}(q^l)\nu^h, \\ l = \overline{1, n+m}; \quad h, s = \overline{1, n+h+r}.$$

Выразив функцию Гамильтона и уравнения связей (10) через координаты и импульсы

$$H = \frac{m^{hs}(q^l)p_h p_s}{2} - P^0(q^i, t) - \frac{k_{\mu\nu}(q^i, t)q^\mu q^\nu}{2}.$$

$$\psi^\mu = q^\mu - f^{\mu-n}(q^i, t) = 0,$$

$$\omega^\mu \equiv m^{\mu\eta}p_\eta - f_j^{\mu-m}p_k - f_t^{\mu-n} = 0,$$

$$\omega^\rho \equiv m^{\rho\eta}p_\eta - f^{\rho-n}(q^i, m^{jk}p_k, t) = 0,$$

уравнения динамики (11) можно представить в виде системы $2n + 2m + r$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных $q^i, p_i, q^\mu, p_\mu, p_\rho$:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} + Q_i - \frac{\partial D^0}{\partial \nu^i} + \omega^{ki}\lambda_k, \quad \omega^{ki} = \frac{\partial \omega^k}{\partial p_i}, \\ \frac{dq^\mu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^\mu} - \frac{\partial D}{\partial \nu^\mu}, \\ \frac{dp_\rho}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \nu^\rho}, \end{aligned} \quad (15)$$

с начальными условиями $q^i(t_0) = q^{i0}$, $p_i(t_0) = m_{ij}(q^{k0})\nu^{j0}$ и $q^\mu(t_0) = q^{\mu0}$, $p_s(t_0) = p_{s0}$, которые определяются через значения q^{i0} , ν^{j0} посредством уравнений связей (10) и функцию Лагранжа L .

Стабилизация связей

Уравнения динамики расширенной системы (14) состоят из двух частей. Первая часть

$$\frac{dq^k}{dt} = \nu^k, \quad \frac{d\nu^k}{dt} = m^{ki} \left(m_i + \varphi_i^k \lambda_k + m_i^{(2)} \right)$$

при определенных выражениях множителей $\lambda_k = \lambda_k(q^i, \nu^j, t)$ составляет уравнения динамики исходной системы. Вторая часть

$$\frac{dq^\mu}{dt} = \nu^\mu, \quad \frac{d\nu^\theta}{dt} = -m^{\theta\eta} \left(k_{\eta\mu} q^\mu + b_{\eta\theta} \nu^\theta \right) \quad (16)$$

представляет собой уравнения возмущений связей (3) и используется для определения выражений множителей Лагранжа. Система уравнений относительно множителей Лагранжа получается в результате дифференцирования выражений (6) в силу уравнений системы (16). Решение этой системы приводит к выражению множителя в виде суммы трех слагаемых $\lambda_k = \lambda_k^{(0)} + \lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}$, распределенных по степеням избыточных переменных q^μ , ν^θ . Первое слагаемое $\lambda_k^{(0)}$ не содержит переменных q^μ , ν^θ и соответствует множителю Лагранжа в классическом случае. Второе слагаемое $\lambda_k^{(1)}$ содержит эти переменные в первой степени и может служить для обеспечения асимптотической устойчивости решения исходной системы по отношению к уравнениям связей (3). Третье слагаемое $\lambda_k^{(2)}$ содержит избыточные переменные q^μ , ν^θ по крайней мере во второй степени.

Очевидно, система (16) имеет тривиальное решение $q^\mu = 0$, $\nu^\theta = 0$. Для стабилизации связей необходимо функцию Лагранжа L и диссипативную функцию D расширенной системы составить так, чтобы тривиальное решение системы (16) было устойчиво асимптотически.

Обозначив через $x = (q^i, \nu^j)$ и $z = (q^\mu, \nu^\theta)$ соответственно векторы состояния исходной системы из области допустимых значений X и вектор возмущений связей, значения которого принадлежат области Z , представим систему уравнений (16) и уравнения программных связей (6) в виде

$$\frac{dz}{dt} = K(x, t)z, \quad \omega(x, t) = z. \quad (17)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если матрица $K(x, t)$ может быть представлена в виде произведения $K(x, t) = -A^{-1}L(x, t)$, матрица A является постоянной, положительно определенной, матрица $L = L(x, t)$ положительно определена при всех $x \in X$, $t > t_0$ и выполняются условия

$$\begin{aligned} 1) \quad & \|L(x, t)\| \geq l > 0; \\ 2) \quad & a_1 \leq \|A\| \leq a_2; \end{aligned} \quad (18)$$

то уравнение (17) имеет экспоненциально устойчивое тривиальное решение $z = 0$.

Составим функцию Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы с постоянной матрицей коэффициентов: $2V = z^T A z$. Производная $dV/dt = W(z, x, t)$ функции V , вычисленная в силу уравнения (17), является определенно-отрицательной квадратичной формой $2W(z, x, t) = -z^T L(x, t)z$ относительно составляющих вектора z . Согласно условию 1) теоремы 1 функция $dV/dt = W(z, x, t)$ ограничена сверху:

$$\frac{dV}{dt} \leq -l\|z\|^2. \quad (19)$$

Из неравенства (19) с учетом условия 2) теоремы следует ограничение на изменения функции V : $dV/dt \leq -2lV/a_2$ или $V \leq V_0 \exp[-2l(t - t_0)/a_2]$. Согласно условию 2) справедливы также неравенства $\|z\|^2 \leq 2V/a_1$, $V_0 \leq a_2\|z_0\|^2/2$. Следовательно, $\|z(t)\|$ является ограниченной экспоненциальной функцией:

$$\|z(t)\|^2 \leq \frac{a_2}{2a_1}\|z_0\|^2 \exp\left[-\frac{2l}{a_2}(t - t_0)\right] \leq \frac{a_2}{2a_1}\varepsilon^2 \exp\left[-\frac{2l}{a_2}(t - t_0)\right].$$

Представим систему уравнений (15) в новых обозначениях в общем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \nu(x, z, t). \quad (20)$$

Уравнения (6) являются частными интегралами системы (20), то есть справедливо равенство

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \nu(x, z, t) + \frac{\partial \omega}{\partial t} = K(x, t)z.$$

Пусть для решения системы уравнений (20) используется разностная схема

$$x_{p+1} = x_p + \tau \nu_p, \quad x_p = x_p(t_p), \quad t_p = t_0 + p\tau, \quad \nu_p = \nu_p(x_p, z_p, t_p),$$

и для оценки отклонения от уравнений связей используется квадратичная форма с постоянной матрицей A коэффициентов: $2V = z^T A z$. Разложив функцию V_{k+1} в ряд по степеням τ , получим выражение

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} \left(z_k^T N_k z_k + \tilde{R}_k \tau^2 \right), \quad (21)$$

$$N = A + \tau (AK + K^T A),$$

$$\begin{aligned}\tilde{R} = & (z^T AR + R^T Az + z^T K^T AKz) + \\ & + \tau (z^T K^T AR + R^T AKz) + \tau^2 (R^T AR),\end{aligned}$$

которое позволит сделать следующее утверждение.

Теорема 2. Если при всех $x \in X$, $t > t_0$ справедливы ограничения

$$z^T Az \geq a_0 \|z\|^2, \quad \|z_k\| \leq \varepsilon, \quad z^T Nz \leq \alpha a_0 \|z\|^2,$$

$$\|\tilde{R}\| \leq \bar{R}, \quad \tau^2 \bar{R} \leq \beta a_0 \varepsilon^2, \quad \alpha + \beta \leq 1,$$

то будет выполняться неравенство $\|z_{k+1}\| \leq \varepsilon$.

Действительно, оценка левой и правой частей равенства (21) приводит к неравенствам

$$\begin{aligned}a_0 \|z_{k+1}\|^2 & \leq z_{k+1}^T A z_{k+1} = z_k^T N_k z_k + \tau^2 \tilde{R}_k \leq \\ & \leq \alpha a_0 \|z_k\|^2 + \tau^2 \bar{R} \leq \alpha a_0 \varepsilon^2 + \beta a_0 \varepsilon^2 \leq a_0 \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Приложения

Пример 2. В примере 1 стабилизация связи (8) обеспечивается при численном решении системы (9), если множитель λ определяется из условий

$$q^3 = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{2}, \quad \frac{dq^3}{dt} = \nu^3, \quad \frac{d\nu^3}{dt} = -1.5\nu^3 - 0.5q^3.$$

Результат решения системы (9) методом Эйлера представлен на рис. 3.

Пример 3. Рассмотрим задачу управления элементом адаптивной оптической системы [16], составленного из невесомого кривошипа OA , вращающегося вокруг оси Ox_3 в плоскости Ox_1x_2 , и закрепленного на нем зеркала A массы m (рис. 4).

$$k=0.5, k_1=1.5$$

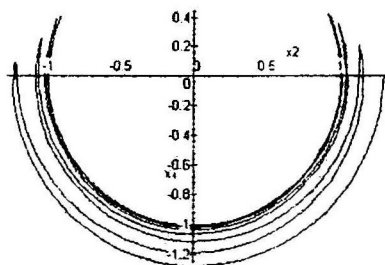


Рис. 3

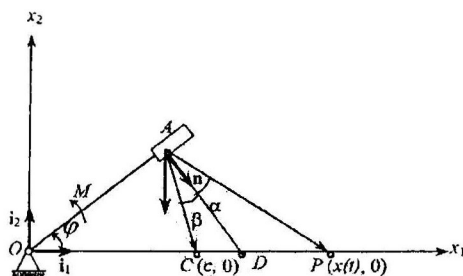


Рис. 4

На зеркало действует сила тяжести mg , направленная в сторону, противоположную направлению оси Ox_2 . Положение зеркала A на плоскости Ox_1x_2 определяется углом φ отклонения кривошипа от оси Ox_1 и расстоянием $OA = R$ до начала координат. Вдоль оси Ox_1 по закону $x_1 = x(t)$ движется точка P , из которой исходит луч света, направленный на зеркало A . Требуется определить выражение момента M , приложенного к кривошипу, при котором луч, отраженный от зеркала, попадает в фиксированную точку $C(c, 0)$, расположенную на оси Ox_1 . Цель управления состоит в поддержании равенства $\alpha = \beta$

углов падения α и отражения β , если $AD \perp OA$, и определяется уравнением связи $x(t)(2c \cos q - R) - Rc = 0$. Динамика элемента адаптивной оптической системы описывается уравнениями

$$\frac{dq}{dt} = \nu, \quad \frac{d\nu}{dt} = -\frac{g}{R} \cos q + M. \quad (22)$$

Уравнения программных связей записываются в виде

$$x(t)(2c \cos q - R) - Rc = y, \quad (23)$$

$$\frac{dx(t)}{dt}(2c \cos q - R) - 2c \nu x(t) \sin q = y'. \quad (24)$$

Составим уравнения возмущений связей:

$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = k_{21}y + k_{22}y'. \quad (25)$$

Из равенств (22) – (25) определяется выражение управляющего момента M :

$$\begin{aligned} M = & -\frac{1}{2cx(t) \sin q} (k_{21}y + k_{22}y') + \\ & + \frac{1}{2cx(t) \sin q} \frac{d^2x(t)}{dt^2} (2c \cos q - R) - \\ & - \frac{2}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} \nu + \frac{g}{R} \cos q - \nu^2 \operatorname{ctg} q. \end{aligned} \quad (26)$$

Система уравнений (22) с учетом выражения (26) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \nu, \\ \frac{d\nu}{dt} &= \frac{1}{2cx(t) \sin q} \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2} (2c \cos q - R) - \right. \\ & \quad \left. - k_{21}y - k_{22}y' \right) - \frac{2}{x(t)} \left(\frac{dx(t)}{dt} + \nu \frac{\cos q}{\sin q} \right) \nu. \end{aligned} \quad (27)$$

Тривиальное решение $y = y' = 0$ системы (25) устойчиво экспоненциально, если $k_{21} < 0$, $k_{22} < 0$. Выберем функцию

$V = z^T A z / 2$, $z = (y, y')$, матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ коэффициентов которой удовлетворяет условиям Сильвестра. Для решения системы уравнений (27) использовался метод Эйлера. Численный эксперимент проведен при следующих данных:

$$R = 3.4641, \quad c = 3, \quad x(t) = 2c + 0.5 \cos t - 1; \quad m = 1; \quad \varphi_0 = 0.4685,$$

$$\nu_0 = -0.005; \quad a_{11} = a_{22} = 1.1, \quad a_{12} = 0.1, \quad a_0 = 1; \quad \bar{R} = 1.$$

Полагая $k_{21} = -2$, $k_{22} = -3$, $\varepsilon = 0.01$, $\tau = 0.001$, определим матрицу $N = \begin{pmatrix} 1.0988 & 0.0940 \\ 0.0940 & 1.0892 \end{pmatrix}$ и получим следующие ограничения для величин α , τ : $\alpha > 0.9901$, $\tau \leq 0.00104$, которым удовлетворяют значения $\alpha = 0.991$, $\beta = 0.009$, $\tau = 0.001$. На рис. 5, а -- 5, г приведены графики функций $x = x(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $y = y(t)$, $y' = y'(t)$.

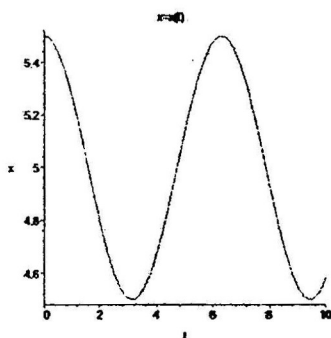


Рис. 5 а

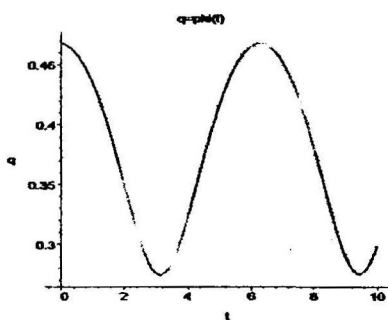


Рис. 5 б

Пример 4. Электромеханическая система. В системе привода кривошипно-шатунного механизма [17] блок питания обеспечивает подачу электрической мощности двигателю переменного тока. Переменный ток через выпрямитель подается

в двигатель постоянного тока, который, в свою очередь, управляет работой кривошипно-шатунного механизма, расположенного в однородном поле силы тяжести (рис. 6).

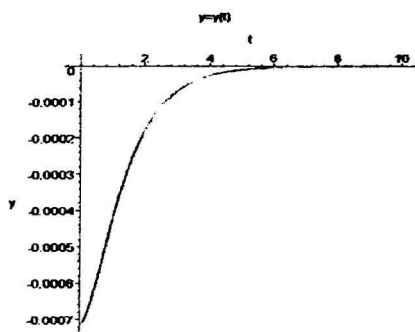


Рис. 5 в

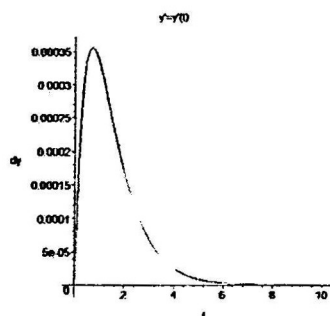


Рис. 5 г

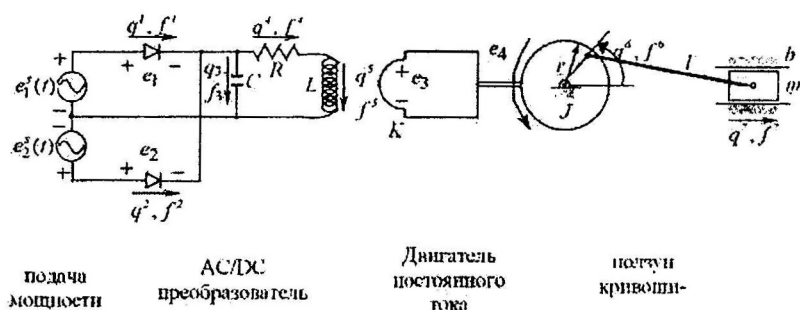


Рис. 6

Построена система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, которая содержит 9 уравнений с 9 неизвестными. Построение уравнений возмущений связей и решение системы дифференциальных уравнений динамики проводилось О.В. Шемеловой с помощью интегрированной системы компьютерной символьной математики MAPLE 7. Решение системы дифференциально-алгебраи-

ческих уравнений и построение фазовых портретов были осуществлены с помощью графической функции phaseportrait методом Эйлера с шагом $h = 0.01$. На рис. 7 и 8 представлены графики голономной связи $(q^7 - r \cos q^6)^2 + (r \sin q^6)^2 = l^2$, полученные в результате кинематического и динамического расчетов. Графические зависимости $q^3(t)$, $q^6(t)$, $f^6(t)$, $q^7(t)$, $f^7(t)$ представлены на рис. 9 – 13 соответственно. Фазовые портреты решения уравнений динамики для переменных $f^5(q^5)$, $f^6(q^6)$, $f^7(q^7)$ изображены на рис. 14 – 16.

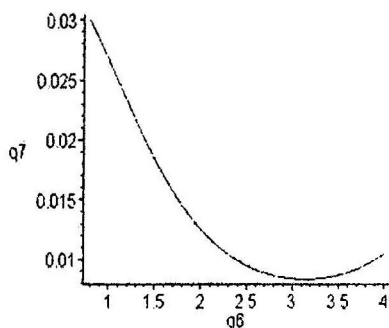


Рис. 7

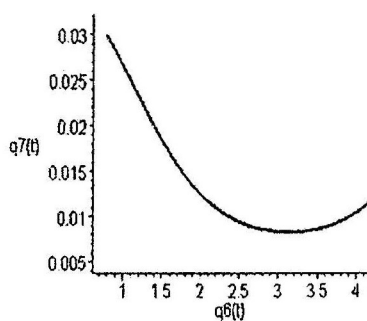


Рис. 8

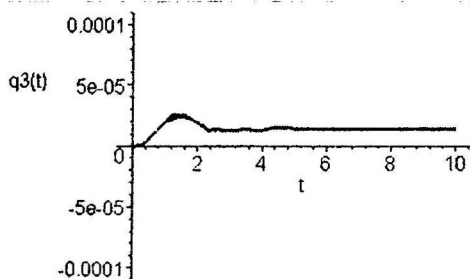


Рис. 9

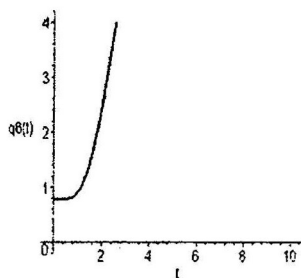


Рис. 10

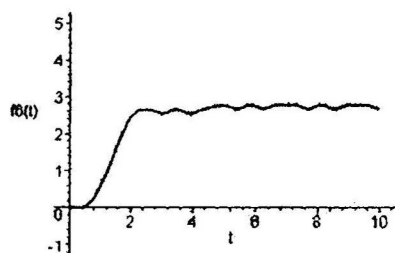


Рис. 11

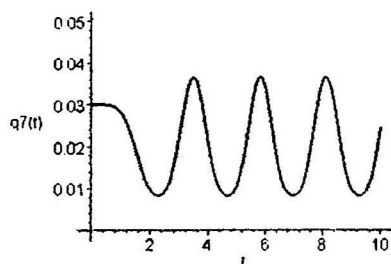


Рис. 12

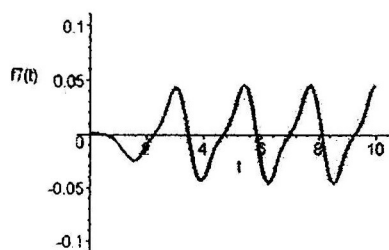


Рис. 13

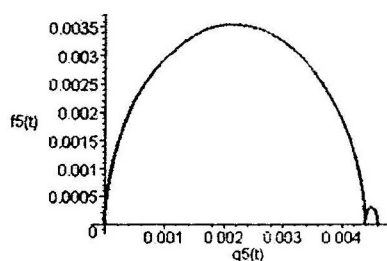


Рис. 14

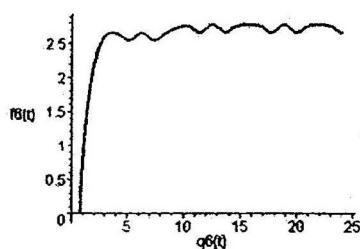


Рис. 15

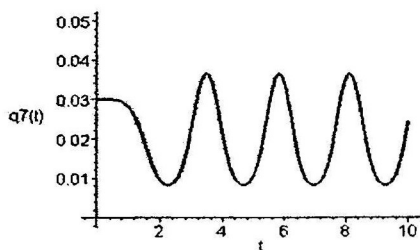


Рис. 16

Пример 5. Управление движением колесной системы по заданной траектории. Моделирование динамики трехколесной системы и решение задачи управления моментами, приложенными к колесам задней оси и рулевому приводу, выполнены

О.В. Ибушевой [18]. Выражения управляющих моментов определены в соответствии с требованием движения центра масс $M(x, y)$ системы из произвольной точки пространства $ХОУ$ к движущейся точке, образованной пересечением прямых $x = -k_1 t$ и $y = 0$, с обходом двух препятствий, заданных уравнениями

$$(x - 2 + k_2 t)^2 + 4y^2 = 1,$$

$$\frac{(x + 1 - k_3 t)^2}{4} + \frac{16(y + 3/2)^2}{9} = 1.$$

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 17 – 20. На рис. 17 приведена траектория движения точки M колесной системы, полученная в результате решения уравнений динамики при заданных начальных условиях. Графики отклонений от уравнений связей представлены на рис. 18 – 21.

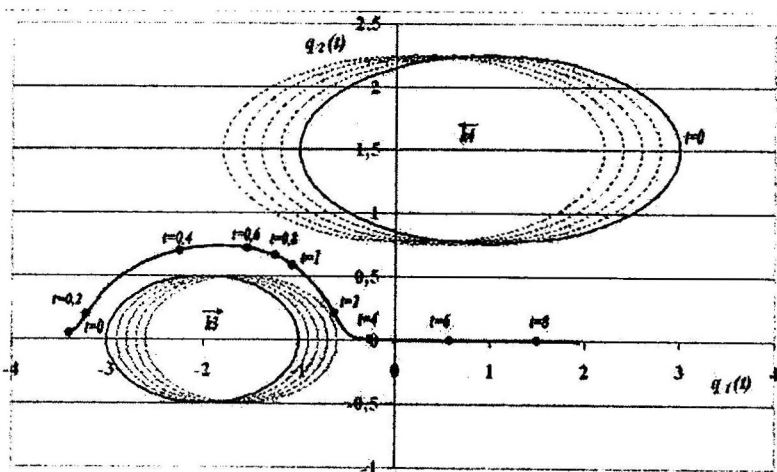


Рис. 17

Пример 6. Решение задачи планирования и управления выпуском продукции условного нефтеперерабатывающего завода (рис. 22) предложено А.А. Ахметовым [19].

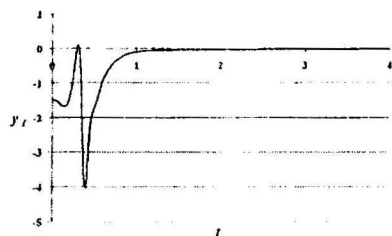


Рис. 18

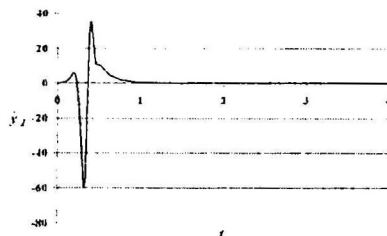


Рис. 19

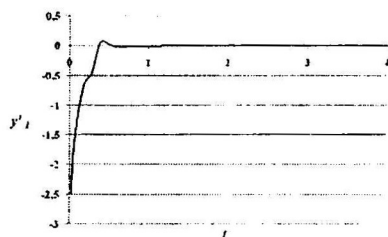


Рис. 20

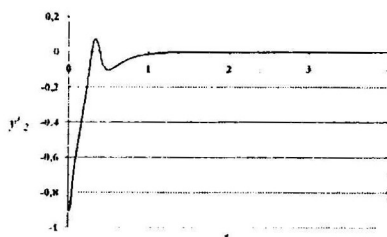


Рис. 21

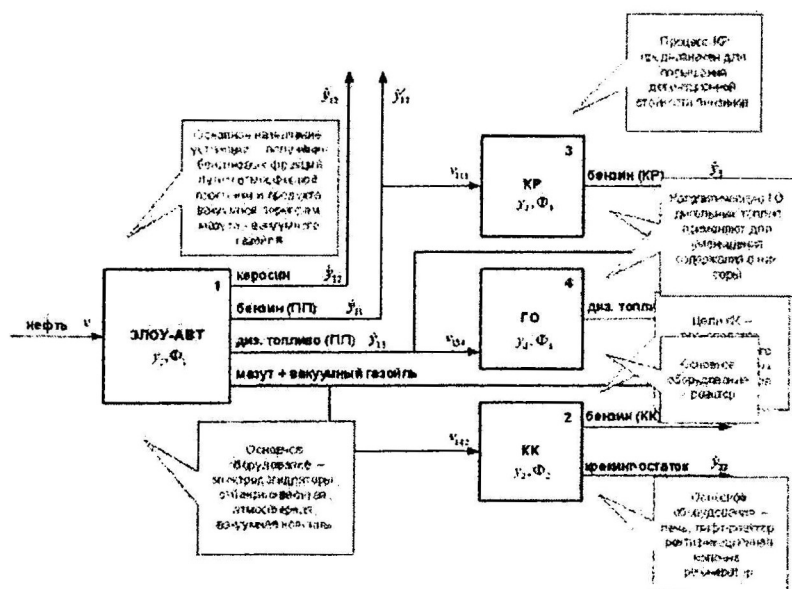


Рис. 22

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00381).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ольсон Г. *Динамические аналогии*. – М.: Гос. изд-во иностр. литер., 1947. – 224 с.
2. Layton R.A. *Principles of analytical system dynamics*. – N.-Y.: Springer, 1998. – 158 p.
3. Грдина Я.И. *Динамика живых организмов*, 1911.
4. Коренев Г.В. *Введение в механику человека*. – М.: Наука, 1977. – 263 с.
5. Пятницкий Е.С. *Избранные труды: в 3 т. Том 3. Теоретическая биомеханика*. – М.: Изд-во физ.-матем. литературы, 2006. – 448 с.
6. Сайтов Р.И. *Математическая модель процесса познания* // Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах России на современном этапе. Часть 2. Материалы II Уральской региональной межвузовской научно-практической конференции 19 – 21 мая 1997 г. – Уфа, 1997. – С. 66-67.
7. Сиразетдинов Т.К. *Динамическая модель прогнозирования и оптимальное управление экономическим объектом* // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1972. – № 4. – с. 3-8.
8. Сиразетдинов Т.К. *Динамическое моделирование экономических объектов*. – Казань: Изд-во “Фэн”, 1996. – 223 с.
9. Сиразетдинов Т.К., Родионов В.В., Сиразетдинов Р.Т. *Динамические модели экономического региона*. – Казань: Изд-во “Фэн”, 2005. – 320 с.
10. Мещерский И.В. *Работы по механике тел переменной массы*. – М. – Л.: Гостехиздат, 1952. – 280 с.

11. Галиуллин А.С. *Методы решения обратных задач динамики*. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
12. Новоселов В.С. *Аналитическая механика с систем с переменными массами*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. – 240 с.
13. Мухарлямов Р.Г. *Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями* // Вестник РУДН. Серия “Физ.-матем. науки”. – 2007. – № 1. – С. 25-34.
14. Ахметов А.А., Мухарлямов Р.Г. *Применение методов моделирования механических систем для управления экономическими объектами* // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 81-84.
15. Мухарлямов Р.Г. *Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства* // ПММ. – 2006. – Т. 70. – № 2. – С. 236-249.
16. *Адаптивная оптика. Сборник переводов. Под ред. Э.А. Витриченко*. – М.: Мир, 1980.
17. Мухарлямов Р.Г. *Приведение уравнений движений механических систем на многообразиях фазового пространства к заданной структуре* // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2007. – С. 84-89.
18. Ибушева О.В., Мухарлямов Р.Г. *Математическое моделирование динамики механических систем с заданными кинематическими свойствами* // Инновации и высокие технологии XXI века: Материалы Всеросс. научн.-практ. конф. (28 – 30 апреля 2009 г., г. Нижнекамск): в 2 т. Т. 1. / под ред. В.И. Елизарова, М.А. Закирова. – Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2009. – С. 174-178.

19. Ахметов А.А., Мухарлямов Р.Г. *Моделирование много-продуктовых производственных объектов с программными связями* // Инновации и высокие технологии XXI века: Материалы Всеросс. научн.-практ. конф. (28 – 30 апреля 2009 г., г. Нижнекамск): в 2 т. Т. 1. / под ред. В.И. Елизарова, М.А. Закирова. – Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2009. – С. 143-147.

К.Б. Сабитов

*Институт прикладных исследований Академии наук РБ
(Стерлитамак), Sabitov_fmfm@mail.ru*

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ И ПРОБЛЕМА ФЕРМА

Введение

В прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < T_0\}$, где l, T_0 – заданные положительные числа, $p \in \mathbb{N}$, рассмотрим уравнение

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} = 0. \quad (1)$$

Задача Дирихле. Найти в D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^{2p-1}(\overline{D}) \cap C^{2p}(D); \quad (2)$$

$$Lu(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D; \quad (3)$$